UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3320/INF4320 — Metoder i grafisk databehandling og diskret geometri
Eksamensdag:	7. desember 2007
Tid for eksamen:	14:30 – 17:30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 OpenGL (vekt $\frac{1}{5}$)

Forklar *kort* hva de følgende begrepene betyr i OpenGL-sammenheng:

1. Modelview matrise
2. Homogene koordinater
3. Texture
4. Buffer object
5. Frame buffer object
6. Shader
7. Program (i sammenheng med en shader)
8. Alpha channel
9. Uniform variabler
10. Varying variabler

Løsning:

1. **Modelview matrisen** beskriver transformasjonen fra koordinatsystemet geometrien blir spesifisert i til koordinatsystemet hvor kameraet ligger i origo og ser nedover negativ z.

(Fortsettes på side 2.)

2. **Homogene koordinater** gir en måte å spesifisere 3D koordinater som 4D koordinater på en måte slik at vi kan spesifisere translasjoner og en del perspektivprojeksjoner som matrisemultiplikasjoner.

3. **Texture** er et rasterbilde som vi kan "lime" på geometri for å geometrien et inntrykk av økt detaljrikdom.

4. **Buffer object** er en mekanisme for å allokere minneblokker på grafikkortet. I disse minneblokkene kan man fylle asynkront, lagre geometri for rask rendering, og render-to-texture uten FBO'er.

5. **Frame buffer object** er en måte å la en kontekst håndtere flere framebuffere. På denne måten kan man f.eks rendre direkte til teksturer uten kopiering, noe som er mye brukt i GPGPU.

6. **Shader** betegner både et programmerbart trinn i pipelinen samt programmet dette trinnet kjører.

7. Shaderene for hvert av de programmerbare stegene link'es sammen til et **program**.

8. **Alpha channel** er en fjerde farvekanal som brukes til å spesifisere gjennomsiktighet. Denne verdien brukes av forskjellige blending-mekanismer for å blande farven til en ny pixel med farven som allerede er der.

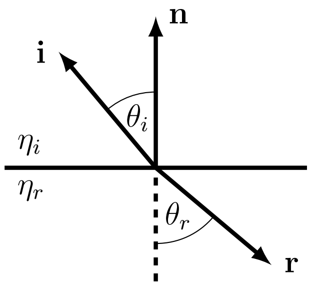
9. **Uniform variabler** kan endres etter linking men er konstante over et sett av primitiver. I motsetning til konstante variable som ikke kan endres etter linking.

10. **Varying variabler** interpoleres over hvert primitiv, slik som f.eks farver og teksturkoordinater.

Oppgave 2 Lys og sjattering (vekt $\frac{1}{5}$)

Hva er Snell's lov? Sett opp uttrykk og lag en liten tegning med relevante vektorer. Når skjer totalrefleksjon?

Løsning: Snell's lov beskriver forholdet mellom retningen på lys som går fra et materiale og retningen på det refrakterte lyset i det andre materialet. Hvis vi lar $\mathbf{n}$ være flatenormalen til overflaten mellom de to materialene, η_i og η_r være lyshastigheten i de to materialene og θ_i og θ_r være retningen på lyset i de to materialene, så er Snell's lov $\eta_i \sin\theta_i = \eta_r \sin\theta_r$.



(Fortsettes på side 3.)

Hvis lyset går fra et materiale hvor η_i er større enn η_r, f.eks fra glass til luft, får vi totalrefleksjon hvis vinkelen for det innadgående lyset er større enn den kritiske vinkelen, som igjen er gitt ved $\sin^{-1}(\frac{\eta_r}{\eta_i})$.

Oppgave 3 Subdivisjon av Bézierkurver (vekt $\frac{1}{5}$)

Vi skal splitte en kubisk Bézierkurve i to nye Bézierkurver.

1. Først anta at vi skal splitte på det parametriske midtpunktet (altså ved $t = \frac{1}{2}$ hvis parameterintervallet til kurven er $[0, 1]$).

   Sett opp formler for kontrollpunktene til de to kurvene vi får når vi splitter.

2. Så anta at vi splitte ved $t = \frac{1}{3}$ (altså den ene nye kurven er den første $1/3$ av den opprinnelige kurven mens den andre er de restrerende $2/3$).

   Sett opp formler for kontrollpunktene til de to kurvene vi får når vi splitter.

Løsning: Vi finner de nye koeffisientene langs sidene til de Casteljau-skjemaet,

$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{c}_0^0 \arrow[dr, "(1-t)"'] & & \mathbf{c}_1^0 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "(1-t)"'] & & \mathbf{c}_2^0 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "(1-t)"'] & & \mathbf{c}_3^0 \arrow[dl, "t"'] \\
& \mathbf{c}_0^1 \arrow[dr, "(1-t)"'] & & \mathbf{c}_1^1 \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "(1-t)"'] & & \mathbf{c}_2^1 \arrow[dl, "t"'] & \\
& & \mathbf{c}_0^2 \arrow[dr, "(1-t)"'] & & \mathbf{c}_1^2 \arrow[dl, "t"'] & & \\
& & & \mathbf{c}_0^3 & & &
\end{tikzcd}
$$

og hvis vi lar $s = 1 - t$ så får vi følgende

		$t = \frac{1}{2}$	$t = \frac{1}{3}$
$\mathbf{p}_0 =$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{c}_0$	$\mathbf{c}_0$
$\mathbf{p}_1 =$	$s\mathbf{c}_0 + t\mathbf{c}_1$	$\frac{1}{2}\mathbf{c}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1$	$\frac{2}{3}\mathbf{c}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{c}_1$
$\mathbf{p}_2 =$	$s^2\mathbf{c}_0 + 2st\mathbf{c}_1 + t^2\mathbf{c}_2$	$\frac{1}{4}\mathbf{c}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_1 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_2$	$\frac{4}{9}\mathbf{c}_0 + \frac{4}{9}\mathbf{c}_1 + \frac{1}{9}\mathbf{c}_2$
$\mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_0 =$	$s^3\mathbf{c}_0 + 3s^2t\mathbf{c}_1 + 3st^2\mathbf{c}_2 + t^3\mathbf{c}_3$	$\frac{1}{8}\mathbf{c}_0 + \frac{3}{8}\mathbf{c}_1 + \frac{3}{8}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{8}\mathbf{c}_3$	$\frac{8}{27}\mathbf{c}_0 + \frac{4}{9}\mathbf{c}_1 + \frac{2}{9}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{27}\mathbf{c}_3$
$\mathbf{q}_1 =$	$s^2\mathbf{c}_1 + 2st\mathbf{c}_2 + t^2\mathbf{c}_3$	$\frac{1}{4}\mathbf{c}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{4}\mathbf{c}_3$	$\frac{4}{9}\mathbf{c}_1 + \frac{4}{9}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{9}\mathbf{c}_3$
$\mathbf{q}_2 =$	$s\mathbf{c}_2 + t\mathbf{c}_3$	$\frac{1}{2}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{c}_3$	$\frac{2}{3}\mathbf{c}_2 + \frac{1}{3}\mathbf{c}_3$
$\mathbf{q}_3 =$	$\mathbf{c}_3$	$\mathbf{c}_3$	$\mathbf{c}_3$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4 Glatthet mellom Bézierkurver (vekt $\frac{1}{5}$)

La $\mathbf{p} : [0,1] \to \mathbb{R}$ og $\mathbf{q} : [0,1] \to \mathbb{R}$ være to Bézierkurver gitt ved

$$\mathbf{p}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{p}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}3,$$
$$\mathbf{q}(t) = (1-t)^3\mathbf{q}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{q}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{q}_2 + t^3\mathbf{q}3,$$

med kontrolpunktene

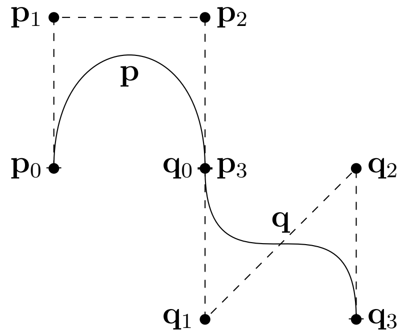
$$\begin{array}{llll} \mathbf{p}_0 = (0,0) & \mathbf{p}_1 = (0,1) & \mathbf{p}_2 = (1,1) & \mathbf{p}_3 = (1,0) \\ \mathbf{q}_0 = (1,0) & \mathbf{q}_1 = (1,-1) & \mathbf{q}_2 = (2,0) & \mathbf{q}_3 = (2,-1). \end{array}$$

La $\mathbf{r} : [0,2]$ være splinekurven definert ved

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{p}(t) & 0 \le t \le 1, \\ \mathbf{q}(t-1) & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

1. Skissér $\mathbf{r}$.
2. Hvilken kontinuitetsorden har $\mathbf{r}$, altså hva er den største k slik, at $\mathbf{r}$ er C^k for $t = 1$?

Løsning: Kurven ser slik ut:



og $\mathbf{r}$ er i allefall C^0 fordi $\mathbf{p}_3 = \mathbf{q}_0$. Videre så har vi at $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0$, så kurven er C^1. Derimot er $\mathbf{r}$ ikke C^2 siden

$$\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = (1,-1) \neq \mathbf{q}_0 - 2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2 = (1,2).$$

Oppgave 5 Subdivisjonsflater (vekt $\frac{1}{5}$)

Gitt et *lukket* trekantmesh $\mathcal{M}$ med N_v noder, N_e kanter og N_t trekanter. Hva er antallet noder, kanter, trekanter og firkanter efter at

1. $\mathcal{M}$ er forfinet én gang med loop subdivisjon?
2. $\mathcal{M}$ er forfinet én gang med $\sqrt{3}$-subdivisjon?

(Fortsettes på side 5.)

3. $\mathcal{M}$ er forfinet én gang med Catmull-Clark-subdivisjon?

Løsning:

Skjema	antall noder	antall kanter	antall trekanter	antall firkanter
Loop	$N_v + N_e$	$2N_e + 3N_t$	$4N_t$	0
$\sqrt{3}$	$N_v + N_t$	$N_e + 3N_t$ alt. $3N_e$	$3N_t$ alt. $2N_e$	0
Catmull-Clark	$N_v + N_e + N_t$	$2N_e + 3N_t$ alt. $4N_e$	0	$3N_t$