

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i INF3320 — Metoder i grafisk databehandling
og diskret geometri
Eksamensdag: 2. desember 2009
Tid for eksamen: 14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hver oppgave teller like mye

Oppgave 1 Data-grafikk

Forklar følgende begreper i datagrafikk-sammenheng:

1. View frustum.
2. Frame-buffer.
3. Aliasing.
4. Fragment.
5. α -blending.
6. Raytracing.

Løsning.

1. *View frustum:* Det området av rommet som kan sees med en gitt kameramodell, avgrenset av et near og et far klippeplan.
2. *Frame-buffer:* En samling av buffere som brukes i rendering i OpenGL, f.eks fargebuffer, z-buffer, stencil-buffer og accumulation-buffer.
3. *Aliasing:* Artefakter som oppstår når en samler med for lav frekvens. Dette forekommer ofte i datagrafikk, f.eks dersom en skal tegne en trekant med en gitt farge. Trekanten kan sees som et signal med uendelig høy frekvens og det er ikke mulig å samle dette med tilstrekkelig frekvens. Diagonale linjer får forstyrrende "trappetrinn" effekter.

(Fortsettes på side 2.)

4. *Fragment*: Et produkt av rasterisering, tilsvarende en bit av geometri som svarer til et pixel. Assosiert med et fragment er ulike typer data, som f.eks farge, som brukes f.eks til å fargesette pixelet.
5. *α -blending*: Kombinasjon mellom f.eks et fragment med forgrunnsfarge og en bakgrunnsfarge i fargebufferen, ved bruk av α -verdi: $(1 - \alpha)F + \alpha B$.
6. *Raytracing*: En global rendering teknikk der en for hvert pixel følger en tenkt lys-stråle fra kamera og gjennom pixelsenteret. Når strålen treffer en flate beregnes et fargebidrag, refleksjoner mm. Strålen kan sendes videre et antall ganger.

Oppgave 2 Homogene koordinater og transformasjoner

1. Hva er affine transformasjoner? Hvordan kan de representeres ved hjelp av matriser og homogene koordinater? Gi eksempel på transformasjonsmatriser for henholdsvis translasjon, skalering og rotasjon en vinkel θ rundt en koordinat-akse i \mathbb{R}^3 .
2. Forklar hvordan en ved hjelp av matriser som i forrige oppgave kan bygge opp en transformasjon som roterer et objekt i \mathbb{R}^3 en vinkel θ rundt en linje definert ved et punkt \mathbf{p} og en vektor \mathbf{v} . Skisser OpenGL kode for transformasjonen.
3. Hvordan kan en utføre transformasjonen i forrige oppgave ved hjelp av kvaternioner?

Løsning.

1. En affin transformasjon f tilfredsstiller $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$ for alle $\alpha + \beta = 1$ for alle x, y . I \mathbb{R}^3 består en affin transformasjon av en translasjon og en lineær transformasjon, $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{t}$. Disse kan representeres ved en 4×4 -matrise på formen $M = \begin{bmatrix} A & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ som for hver vektor $\mathbf{x} = (x, y, z)$ opererer på dens homogene koordinatvektor $(x, y, z, 1)$. Eksempler (translasjon, skalering og rotasjon rundt z-aksen):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. En må først translaterer \mathbf{p} til origo, deretter utføre rotasjonen rundt valgt vektor, før en translaterer tilbake til utgangspunktet \mathbf{p} : $T(\mathbf{p})R_{\mathbf{v}}(\theta)T(-\mathbf{p})$. Rotasjonsmatrisen $R_{\mathbf{v}}(\theta)$ kan bygges ved akse-rotasjoner som over, ved å rotere \mathbf{v} ned på en koordinatakse, rotere en vinkel θ rundt denne, og så rotere tilbake. OpenGL kode:

```
glTranslate3f(-p_x, -p_y, -p_z) ;
glRotate3f(theta, v_x, v_y, v_z) ;
glTranslate3f(p_x, p_y, p_z) ;
```

(Fortsettes på side 3.)

3. En kan bytte ut rotasjonsmatrisen med en kvaternione-operasjon:

$$R_{\mathbf{v}}(\theta)\mathbf{x} = \mathbf{r}\mathbf{x}\mathbf{r}^*$$

der \mathbf{r} er kvaternionen gitt ved

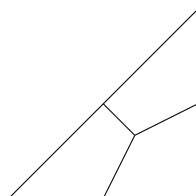
$$\mathbf{r} = [\sin(\theta/2)\mathbf{v}, \cos(\theta/2)]^T$$

Oppgave 3 Subdivision

La \mathcal{T} være en triangulering av enhetskulen i \mathbb{R}^3 , dvs. vertexene til \mathcal{T} ligger på kulen og trianguleringen er lukket. La $V(\mathcal{T})$, $E(\mathcal{T})$ og $F(\mathcal{T})$ være henholdsvis antallet vertexer, edger og polygoner (faces) i \mathcal{T} . La \mathcal{T}^1 være resultatet av ett steg med Catmull-Clark subdivision anvendt på \mathcal{T} .

1. Illustrer topologien til \mathcal{T}^1 med referanse til en trekant i \mathcal{T} . Uttrykk $V(\mathcal{T}^1)$, $E(\mathcal{T}^1)$ og $F(\mathcal{T}^1)$ ved hjelp av $V(\mathcal{T})$, $E(\mathcal{T})$ og $F(\mathcal{T})$.
2. Hvilke genus og Euler-karakteristikk har henholdsvis \mathcal{T} og \mathcal{T}^1 ? Uttrykk Euler-karakteristikken til \mathcal{T}^1 ved hjelp av $V(\mathcal{T}^1)$, $E(\mathcal{T}^1)$ og $F(\mathcal{T}^1)$.
3. Er \mathcal{T}^1 inneholdt i enhetskulen? Er Catmull-Clark grenseflaten med hensyn på \mathcal{T} inneholdt i enhetskulen? Begrunn svarene.

Løsning.

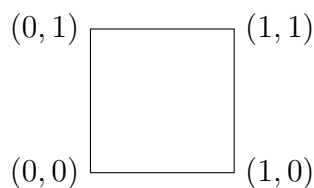


1. $V(\mathcal{T}^1) = V(\mathcal{T}) + E(\mathcal{T}) + F(\mathcal{T})$, $E(\mathcal{T}^1) = 2E(\mathcal{T}) + 3F(\mathcal{T})$ og $F(\mathcal{T}^1) = 3F(\mathcal{T})$.
2. 0 og 2 for begge. $\chi(\mathcal{T}^1) = V(\mathcal{T}^1) - E(\mathcal{T}^1) + F(\mathcal{T}^1)$.
3. Ja, begge er inneholdt pga. konveks innhylningsegenskapen - "nye" kontrollpunkter er konvekse kombinasjoner av de "gamle", som alle ligger inneholdt i kulen.

Oppgave 4 Bilineær interpolasjon

Anta du har gitt verdier $f_{i,j}$ i de fire hjørnene (i, j) for $i, j = 0, 1$ som illustrert i figuren under, og la $f(x, y)$ være den bilineære interpolanten til $f_{i,j}$.

(Fortsettes på side 4.)



1. Forklar hva bi-lineær interpolasjon er og gi et eksempel på hva det brukes til i datagrafikk.
2. Skriv ned et uttrykk for $f(x, y)$.
3. Uttrykk $f(0, 0)$, $f(1/2, 0)$ og $f(1/2, 1/2)$ ved å bruke verdiene $f_{i,j}$. Forklar hvorfor ingen av disse kan være større enn $\max f_{i,j}$.

Løsning.

1. *Bi-lineær interpolasjon er en metode for å interpolere data som er gitt i hjørnene på en firkant, slik at interpolanten er lineær når en holder en koordinat fast. Det brukes f.eks til å interpolere teksturer og til geometri definert ved fire hjørner (quads).*
2. $f(x, y) = (1 - x)(1 - y)f_{00} + (1 - x)yf_{01} + x(1 - y)f_{10} + xyf_{11}$.
3. $f(0, 0) = f_{00}$, $f(1/2, 0) = (f_{00} + f_{10})/2$ og $f(1/2, 1/2) = (f_{00} + f_{01} + f_{1,0} + f_{1,1})/4$. *Ingen av disse kan være større enn $\max f_{i,j}$ fordi $f(x, y)$ er en konveks kombinasjon av disse verdiene. Alternativ forklaring: BI er repetert lineær interpolasjon, og*

Oppgave 5 Bézier kurver

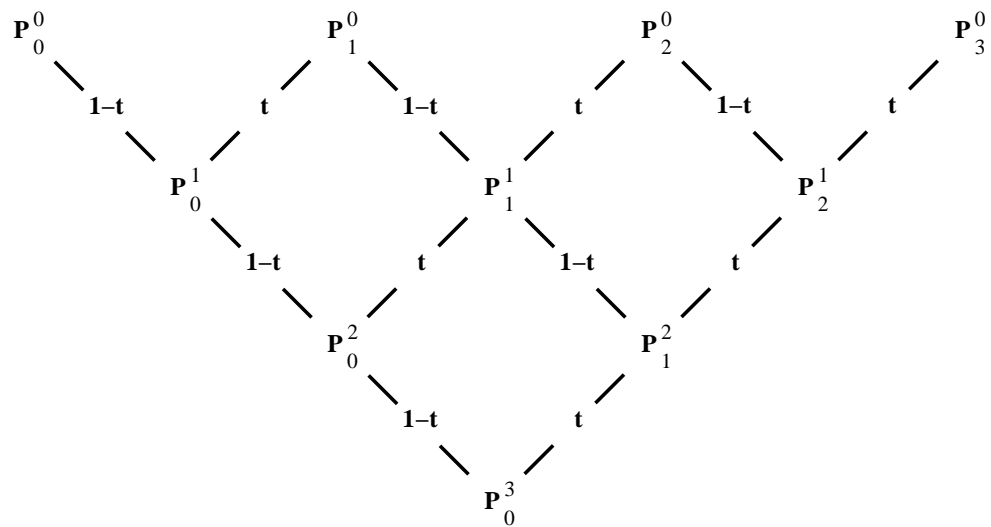
1. Skriv ned det generelle uttrykket for en Bézier kurve og forklar utfra dette hva kontroll-polygonet er.
2. Forklar de Casteljau algoritmen for evaluering av Bézier kurver, illustrert med figur.
3. Forklar hvorfor et punkt på en Bézier kurve ikke kan ligge utenfor den konvekse innhylningen til kontroll-polygonet.

Løsning.

1. $f(t) = \sum_{i=0}^d \mathbf{P}_i B_i(t)$, der $B_i(t) = \binom{d}{i} (1-t)^{d-i} t^i$. *Kontroll-polygonet er polygonet gitt ved kontrollpunktene (\mathbf{P}_i) i sekvens.*

(Fortsettes på side 5.)

2. de Casteljau algoritmen er basert på repetert lineær interpolasjon på kontroll-polygonet.



3. $f(t)$ er et vektet gjennomsnitt av kontrollpunktene, dvs. gitt som en sum av kontrollpunkter, med vekter som er positive og summerer til 1.